2 - Funkce a rovnice

Následující základní znalosti je nezbytně nutné umět od okamžiku probrání až do konce kapitoly (většinou do napsání čtvrtletní písemné práce, na výjimky z tohoto pravidla bude upozorněno). Vyžadováno bude porozumění a schopnost aplikovat ne pouze mechanicky zopakovat.
Některé body neodpovídají přesně modrým rámečkům v textu poznámek, protože jde například o spojení nebo generalizaci několika míst, nic to však nemění na platnosti předchozího odstavce.
Mezi body jsou uvedeny i všechny body z červených rámečků (což je logické, když je nutné něco umět do konce studia, je nutné to umět i do konce kapitoly).

2.1 -

Funkce je předpis, který nám říká, jak něčemu přiřadit reálné číslo (nakreslit šipku od něčeho k reálnému číslu). Aby bylo přiřazování jednoznačné, musí od čehokoliv vést pouze jedna šipka.

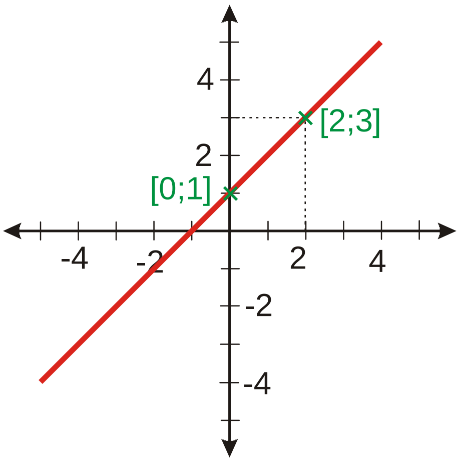
2.2 -

Lineární funkce je každá funkce, která jde zapsat ve tvaru $y = ax + b$, kde $a, b \in R$. Grafem lineární funkce je přímka (část přímky).
Konstanta *a* určuje u grafu funkce směr, konstanta *b* posunutí ve svislém směru.
Graf nakreslím pomocí dvou bodů ze dvojího dosazení za *x*:

$y = x + 1$

$x = 0 \Rightarrow y = x + 1 = 0 + 1 = 1 \Rightarrow \text{bod}[0;1]$

$x = 2 \Rightarrow y = x + 1 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow \text{bod}[2;3]$



2.3 -

$3x - 1 = \frac{2x+6}{2}$ - rovnost dvou výrazů, za x můžeme dosazovat různá čísla, tím měníme hodnoty obou výrazů, hledáme takové x, aby rovnost platila,
z této rovnice není vidět správné x, upravíme rovnost, tak aby dál platila a x bylo lépe vidět
Úpravy, které můžu dělat:

- **musí z rovnajících se čísel vyrobit rovnající se čísla**
- **nesmí z nerovnajících čísel vyrobit rovnající se čísla**

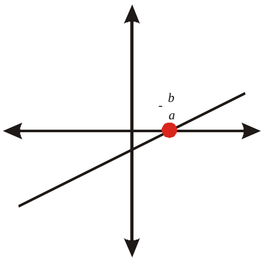
Nazývají se ekvivalentní úpravy a jsou to:

- **přičítání a odečítání reálného čísla**
- **násobení reálným číslem kromě nuly**
- **dělení reálným číslem kromě nuly**

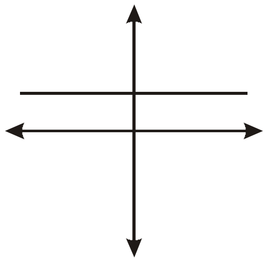
Umocněním neztratím žádné správné řešení, ale mohou se objevit klamná další řešení. Proto typicky provádím zkoušku.

2.4 -

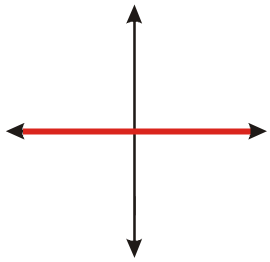
Možnosti řešení lineární rovnice $ax + b = 0$ poznám z hledání průsečíků lineární funkce $y = ax + b$ s osou x (osa x = body s nulovou y-vou souřadnicí).



1 řešení



žádné řešení



nekonečně mnoho řešení

2.5 -

Obecný postup řešení lineární rovnice:

1. roznásobím všechny závorky
2. na jednu stranu dám výrazy s x, na druhou dám zbytek
3. vytknu x před závorku a závorkou vydělím

2.6 -

$3x - 1 > \frac{2x+6}{2}$ - nerovnost dvou výrazů, úvahy podobné jako u rovnic.

Při řešení nerovnic můžeme používat následující úpravy:
1) <u>ekvivalentní jednoduché</u>

- přičítání (odčítání) reálných čísel,
  přičítání (odčítání) výrazů s neznámou
- násobení a dělení kladnými čísly

2)<u>ekvivalentní s obrácením znaménka</u>

- násobení a dělení zápornými čísly

3)<u>ekvivalentní složité</u>

- násobení a dělení výrazem s neznámou (musíme zjistit jestli je výraz kladný nebo záporný a pokud může být obojí, musíme výpočet rozdělit)

2.7 -

Rozdělení výpočtu

Když se operace nechová u všech čísel, která chci prověřit stejně (násobení výrazem s neznámou, absolutní hodnota apod.), rozdělím výpočet na více cest. Na konci každé cesty kontroluju jestli výsledek patří do skupiny čísel, se kterou jsem počítal.

$$\frac{3x}{2x+1} \le 1$$

Potřebuji vynásobit nerovnici výrazem $(2x+1)$, může být kladný i záporný, musím rozdělit řešení do dvou větví

$$2x+1<0 \Rightarrow x<-\frac{1}{2}$$

$$\frac{3x}{2x+1} \le 1 \qquad / \cdot (2x+1)$$

(násobím záporným číslem $\Rightarrow$ obrátím nerovnost)

$$3x \ge 2x+1$$

$x \ge 1$ nerovnost platí pro $x \in \langle 1;\infty)$, ale počítám pouze s $x<-\frac{1}{2}$

$$K_1 = \emptyset$$

$$2x+1>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{2}$$

$$\frac{3x}{2x+1} \le 1 \qquad / \cdot (2x+1)$$

(násobím kladným číslem $\Rightarrow$ nebudu obracet nerovnost)

$$3x \le 2x+1$$

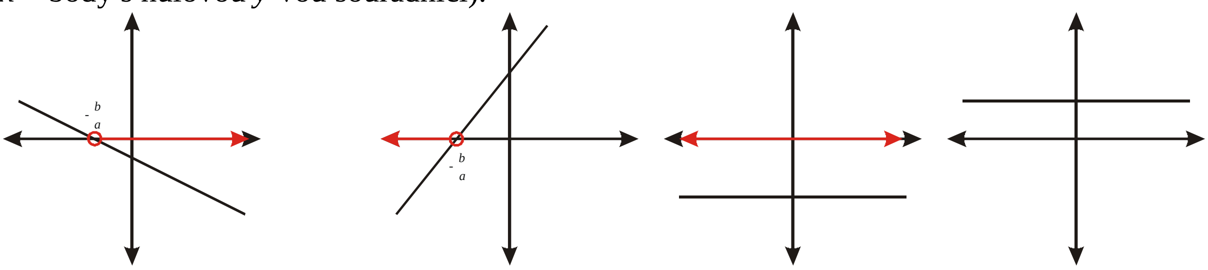
$x \le 1$ - nerovnost platí pro $x \in (-\infty;1\rangle$, ale počítám pouze s $x>-\frac{1}{2}$

$$K_2 = \left(-\frac{1}{2};1\right\rangle$$

$$K = K_1 \cup K_2 = \left(-\frac{1}{2};1\right\rangle$$

2.8 -

Možnosti řešení lineární nerovnice $ax+b<0$ zjistím, pomocí grafu lineární funkce $y=ax+b$. Řešením jsou ta *x*, pro něž je hodnota *y* menší než nula a graf leží pod osou *x* (osa *x* = body s nulovou *y*-vou souřadnicí).



2.9 -

Součinový tvar

Řešením rovnice v součinovém tvaru (s nulou na pravé straně), jsou všechna čísla pro která, se libovolná ze závorek v součinu rovná nule.
Pravidlo je možné použít pouze když je jedna strana rovnice rovna nule.

$(x+1)(x-3)(x+\pi)=0$

$(x+1)=0 \qquad (x-3)=0 \qquad (x+\pi)=0$

$x=-1 \qquad x=3 \qquad x=-\pi$

$K=\{-1,3,-\pi\}$

2.10 -

Nerovnice v součinovém tvaru

Vyřeš nerovnici $(x+2)(2x-1)\geq 0$

Vlevo součin 2 čísel, vpravo nula $\Rightarrow$ jde pouze o znaménko obou závorek

	$(-\infty;-2)$	$\left(-2;\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};\infty\right)$
$(x+2)$	-	+	+
$(2x-1)$	-	-	+
$(x+2)(2x-1)$	+	-	+

Řešením jsou červené intervaly: $K=(-\infty;-2\rangle\cup\left\langle\frac{1}{2};\infty\right)$ (Hraniční body jsou součástí řešení, protože v nerovnosti je $\geq$.)

2.11 -

Soustavy rovnic

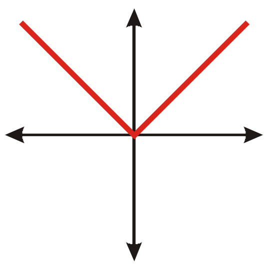
Neznámé = možnosti volit čísla
Rovnice = podmínky omezující volbu čísel
Soustavu rovnic zjednoduším, aby byly podmínky přehledné („vyrábění nul“)
Podle počtu neznámých a podmínek najdu řešení (podmínky jsoucí proti sobě $\Rightarrow$ žádné řešení).

2.12 -

Absolutní hodnota

$|x| \qquad x\geq 0\Rightarrow|x|=x$

$\qquad x<0\Rightarrow|x|=-x \qquad \Rightarrow$

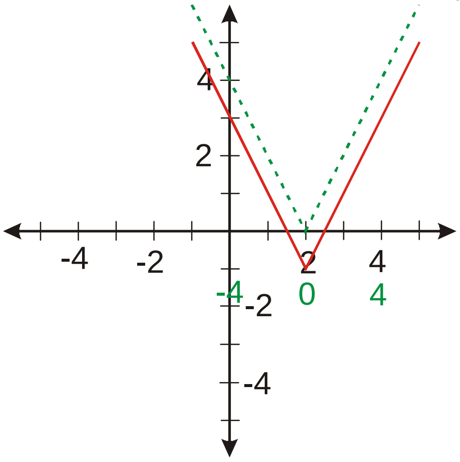


2.13 -

Kreslení grafů

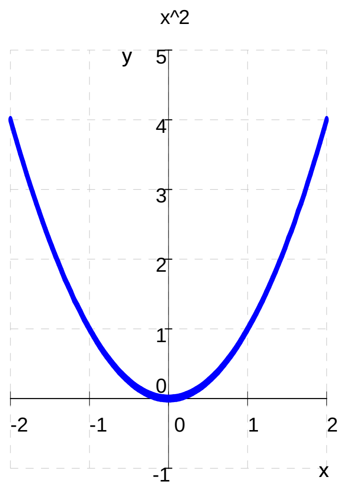
$y = |x| = f(x)$

$y = |2x-4| - 1 = f(2x-4) - 1$ čísla uvnitř závorky mění osu do které nakreslíme absolutní hodnotu, čísla vně závorky deformují nakreslený graf



2.14 -

Kvadratická funkce



2.15 -

Doplnění na čtverec

Vždy si mohu kvadratický trojčlen napsat jako druhou mocninu:

$$A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$$

$$4x^2 + 16x + 4 = \left[(2x)^2 + 2\cdot(2x)\cdot 4 + 4^2\right] - 4^2 + 4 = (2x+4)^2 - 16 + 4 = (2x+4)^2 - 12$$

+ - 0

2.16 -

Odmocnina a inverzní funkce

Inverzní funkce = dvojice jsou stejné, ale prohodí se *x* a *y* (obrátím směr šipky)

$y = f(x) \qquad y' = f(x')$

$4 = (2)^2 \qquad 2 = \sqrt{4}$

$4 \leftarrow 2 \qquad 2 \leftarrow 4$

2.17 -

Odmocnina

$\sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}} \Rightarrow \sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}}$

2.18 -

Metoda nulových bodů

$\sqrt{x^2 - x - 2} > 2$, řešení pomáhá funkce $y = \sqrt{x^2 - x - 2} - 2$, kdy je větší než nula $\Rightarrow$, když je nad osou *x* $\Rightarrow$ znaménko může změnit jen přechodem přes nulu nebo v místě přetržení $\Rightarrow$ najdu přechody přes nulu (řešení rovnice) a přetržení (podmínky), pak vyzkouším

podmínky: $x^2 - x - 2 \geq 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) \geq 0 \Rightarrow x \in R - (-1;2)$

nulové body: $\sqrt{x^2 - x - 2} = 2 \quad /^2$

$x^2 - x - 2 = 4$

$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = -2; x_2 = 3$

Zkouším:

$x \in (-\infty;-2) \Rightarrow \sqrt{(-100)^2 - (-100) - 2} > 2 \Rightarrow K_1 = (-\infty;-2)$

$x \in (-2;-1) \Rightarrow \sqrt{(-2,5)^2 - (-2,5) - 2} < 2 \Rightarrow K_2 = \varnothing$

$x \in (-1;3) \Rightarrow \sqrt{(1,5)^2 - (1,5) - 2} < 2 \Rightarrow K_3 = \varnothing$

$x \in (3;\infty) \Rightarrow \sqrt{100^2 - 100 - 2} > 2 \Rightarrow K_4 = (3;\infty)$

$K = (-\infty;-2) \cup (3;\infty)$

2.19 -

Logaritmus

je inverzní funkce k mocnině

$\log_2 8 = 3 \qquad \leftrightarrow \qquad 2^3 = 8$

Logaritmus při základu 2 z 8 je takové číslo, na které musím umocnit 2 aby mi vyšlo 8, tedy 3.